

Title	Existence and Non-existence of local minimizers of GL energy with magnetic effect (Variational Problems and Related Topics)
Author(s)	神保, 秀一
Citation	数理解析研究所講究録 (2001), 1237: 208-215
Issue Date	2001-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/41567
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

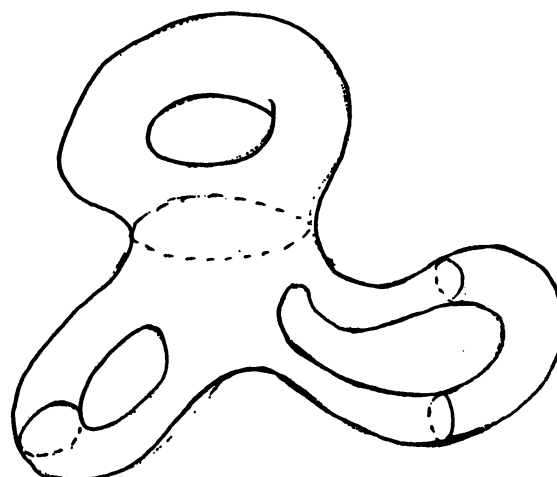
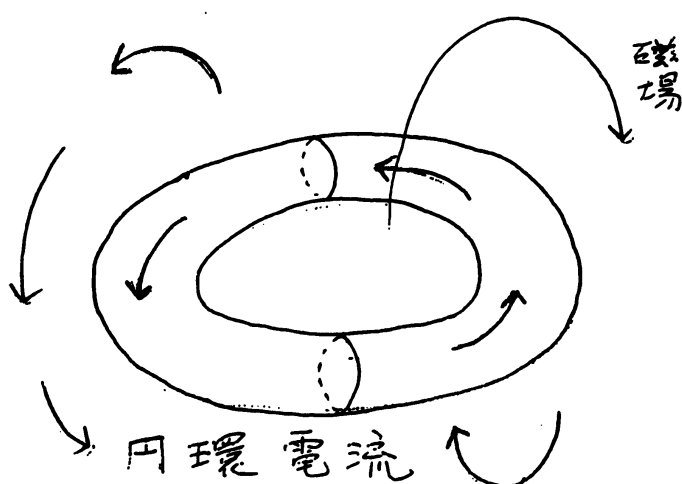
Existence and Non-existence of local minimizers of GL energy with magnetic effect

北海道大学・理 神保秀一 (Shuichi JIMBO)

Department of Mathematics, Hokkaido University

§1. 導入. 安定解の存在

本稿では(低温)超伝導のモデルとして現れるギンツブルグ・ランダウ (GL) 汎関数や, その変分方程式である ギンツブルグ・ランダウ (GL) 方程式を考える. 超伝導現象の著しい特徴のひとつは永久電流であるが, これは外部からなにも働きかけがなくても, 減衰することなく(半)永久的に電流が存続する状態である. 一般には物体に電流があってもそのままでは電気抵抗によって電流が減衰してしまうが, ある物理状況でそれが実現できるということが常識を覆し大発見となった(20世紀初頭). このような現象はギンツブルグ・ランダウ (GL) によってモデル化され数学の問題に帰着されているが, その解析は必ずしも容易ではなく現象が解明されたということにはなっていない. GL の理論とはエネルギー汎関数の Local minimizer によって永久電流の状態を規定するものである. すなわち, 物理的な状態(安定状態)の研究を GL 汎関数の変分問題に帰するものである. 我々の問題意識はいかなる領域に安定解がどのように存在するかということである. 最初に発見された超伝導現象は針金状の物体上の円環電流であったが, それでは一般の複雑な形ではどうであろうか. 我々は Ω に関する依存性を研究し複雑な解を生成するメカニズムをよく理解したいと思っている. 素朴な発想としては Ω が単純な形状だと単純な安定解しか許されず, 複雑だと安定解が豊かに存在する状況になる, と考えられる. これは, 楕円型方程式や反応拡散方程式などパターン形成の研究の例からも一般的に予想されることであり, そのことの数学的な解析を与えたい.



このような領域ではどうか?

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は滑らかな境界をもつ有界領域とする. (Φ, A) を変数として次の汎関数を考える.

$$(1.1) \quad \mathcal{H}_\lambda(\Phi, A) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\text{rot} A|^2 dx.$$

ただし, Φ (\mathbb{C} -valued) は上の複素数値関数, A は \mathbb{R}^3 上の \mathbb{R}^3 値関数である. $\lambda > 0$ はパラメータである. やるべき研究はこの汎関数の性質をできるだけ詳しく知ることである. 汎関数の重要な特徴は Critical Point であるが, それは \mathcal{H}_λ の変分方程式として得られる GL 方程式の解である. 簡単な計算により

$$(1.2) \quad \begin{cases} (\nabla - iA)^2 \Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - i\langle A \cdot \nu \rangle \Phi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \text{rot rot } A + (i(\bar{\Phi} \nabla \Phi - \Phi \nabla \bar{\Phi})/2 + |\Phi|^2 A) \Lambda_\Omega = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準内積, Λ_Ω は Ω の特性関数. 超伝導現象は物質の中のたくさん自由電子が電流として動きその状態を永続できるほどの安定性をもっている現象である (永久電流) が, この状態がどのようにして規定されるかを記述する物理理論が GL 理論である. 数学的には上記変分問題の極小化解 (Φ, A) が対応する. Φ は電子の状態を表し, A は磁場のベクトルポテンシャルである. 現象の本質は外部磁場 H がたとえゼロであっても場合によっては自明でない解 (永久電流がちゃんと流れる状態に対応) があり得ることである. 通常の物質であれば電気抵抗によって電流は減衰することが普通のことであるから, 注目すべき発見であったのであるが, 本研究は永久電流がどのような幾何形状の物体に存在できるかを考えることに対応する.

まず, 汎関数 (1.1) および 方程式 (1.2) は, 第一の重要な性質として次の (ゲージ) 変換による不変性をもつことを注意する.

$$(1.3) \quad \begin{cases} (\Phi, A) \mapsto (\Phi', A') \\ \Phi' = e^{i\rho} \Phi, \quad A' = A + \nabla \rho \quad (\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}). \end{cases}$$

ρ をいろいろとることによって, ひとつの解 (Φ, A) から解の連続体 $C(\Phi, A)$ を得るが, この連続体 (同値類) 自体がひとつの状態と考えることになっている. このような考えに従えば, (Φ, A) の安定性とはこの連続体 $C(\Phi, A)$ 横断的な方向へのエネルギー \mathcal{H}_λ の増減あるいは大小で考えるのが自然であることがわかる. Critical Point (危点) では (第 1) 変分が消えているが, その局所的性質をさらに調べるため汎関数の第 2 変分公式を用意する.

第 2 変分公式 (Φ, A) における \mathcal{H}_λ の第 2 変分は以下のように与えられる. ただし, (Ψ, B) が摂動の変数である.

$$(1.4) \quad \begin{aligned} J_\lambda(\Phi, A; \Psi, B) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{H}_\lambda(\Phi + \epsilon\Psi, A + \epsilon B)|_{\epsilon=0} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ |\nabla \Psi|^2 + i\langle \nabla \Phi, \bar{\Psi} B \rangle + i\langle \nabla \Psi, A \bar{\Psi} + B \bar{\Phi} \rangle - i\langle \nabla \bar{\Phi}, \Psi B \rangle - i\langle \nabla \bar{\Psi}, A \Psi + B \Phi \rangle \\ &\quad + |A|^2 |\Psi|^2 + \langle A, B \rangle (\Phi \bar{\Psi} + \bar{\Phi} \Psi) + |B|^2 |\Phi|^2 \} dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \int_{\Omega} ((\Phi \bar{\Psi} + \bar{\Phi} \Psi)^2 - 2(1 - |\Phi|^2) |\Psi|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\text{rot } B|^2 dx \end{aligned}$$

Jimbo and Morita [6], Rubinstein and Sternberg [12], Jimbo and Zhai [7] らの結果により, 総

合しておおむね次のことがわかっている (定理 1, 2. ただし, すこし端折っているので, 正確なステートメントについては論文を参照されたい). 次のような関数空間を準備する.

$$Z = \{A \in L^6(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \mid \nabla A \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3 \times 3})\}, \quad \|A\|_Z = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla A|^2 dx \right)^{1/2} \quad (A \in Z)$$

とおき, 汎関数 \mathcal{H}_λ を

$$X = H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times Z$$

において考える.

定理 1. Ω は単連結でないと仮定する. このとき, $\lambda_0 > 0$ が存在して $\lambda \geq \lambda_0$ の条件のもとで \mathcal{H}_λ は Local minimizer $(\Phi_\lambda, A_\lambda) \in X$ をもち, また, λ が増大すれば, ますます多くの本質的に異なるものが存在する.

注: この結果は 2 次元の場合も成立する.

さらにこの Local minimizer の安定度も第 2 変分により特徴付けられる.

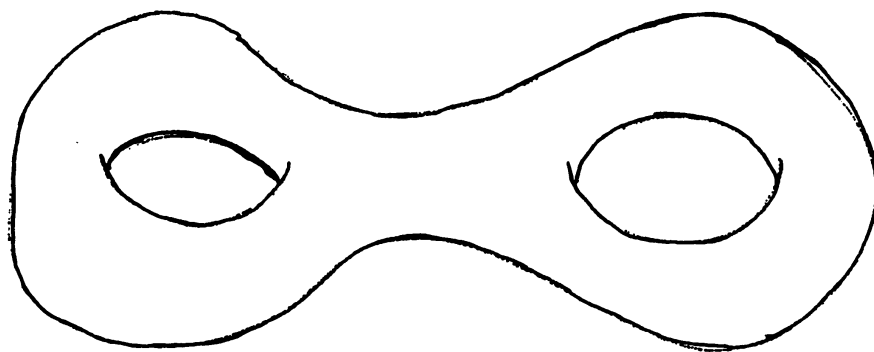
定理 2. 上で得られた Local minimizer $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ にたいし, 第 2 変分の 2 次形式はある意味で正定値であることも言える. すなわち, ある定数 $c > 0$ があって

$$J_\lambda(\Psi, B) \geq c \left(\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|B\|_Z^2 \right) \quad (\Psi, B) \in X_2.$$

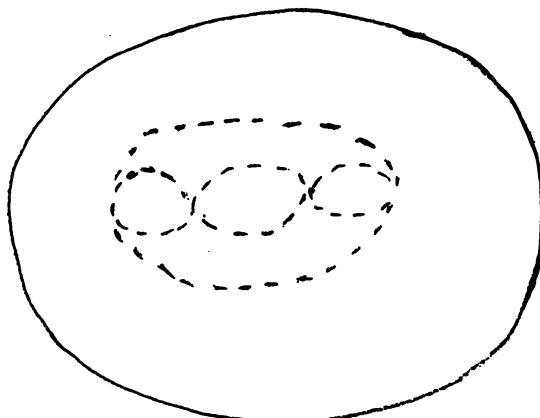
ここで, 部分空間 $X_2 \subset X$ は $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ におけるゲージ変換の方向と横断する部分空間である. X_2 の特徴付けについては [6] を参照.

これにより解 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ についてそのゲージ変換に関する同値類は, 類としては狭義に安定であることがわかる.

単連結でない領域の典型例



多重連結ドーナツ



球からドーナツを取り除いた領域

さらにこの安定性の非退化の性質によりにより多少領域を乱暴に変形してもこの解は存続できることも示せる。野生的な領域変形として様々な位相のものを採用することができる。もともとの Ω として例えばソリッドトーラスであったとすれば、その穴に薄膜をはめ込んで可縮なもので体積がほとんど同じものができるが、このような領域に安定な解を構成することもできる (cf. Jimbo and Zhai [8]).

[領域の特異変形]

Ω を含む領域の族 $\Omega(\zeta)$ ($\zeta > 0$) を考え、次の条件をみたすとする。

- (a) $\Omega(\zeta_2) \supset \Omega(\zeta_1) \supset \Omega$ ($0 < \zeta_1 \leq \zeta_2$)
- (b) $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \text{Vol}(\Omega(\zeta) \setminus \Omega) = 0$.

このような領域 $\Omega(\zeta)$ について同様の問題を考える。ただし、上の説明に書いたように $\zeta > 0$ が小さくても、この領域は Ω と同相とは限らない。次の GL 汎関数を考え、定理 1, 2 で得られる Local minimizer $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ の摂動を考える。

$$(1.5) \quad \tilde{\mathcal{H}}_\lambda(\Phi, A) = \int_{\Omega(\zeta)} \left(\frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right) dx + \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{2} |\text{rot} A|^2 dx.$$

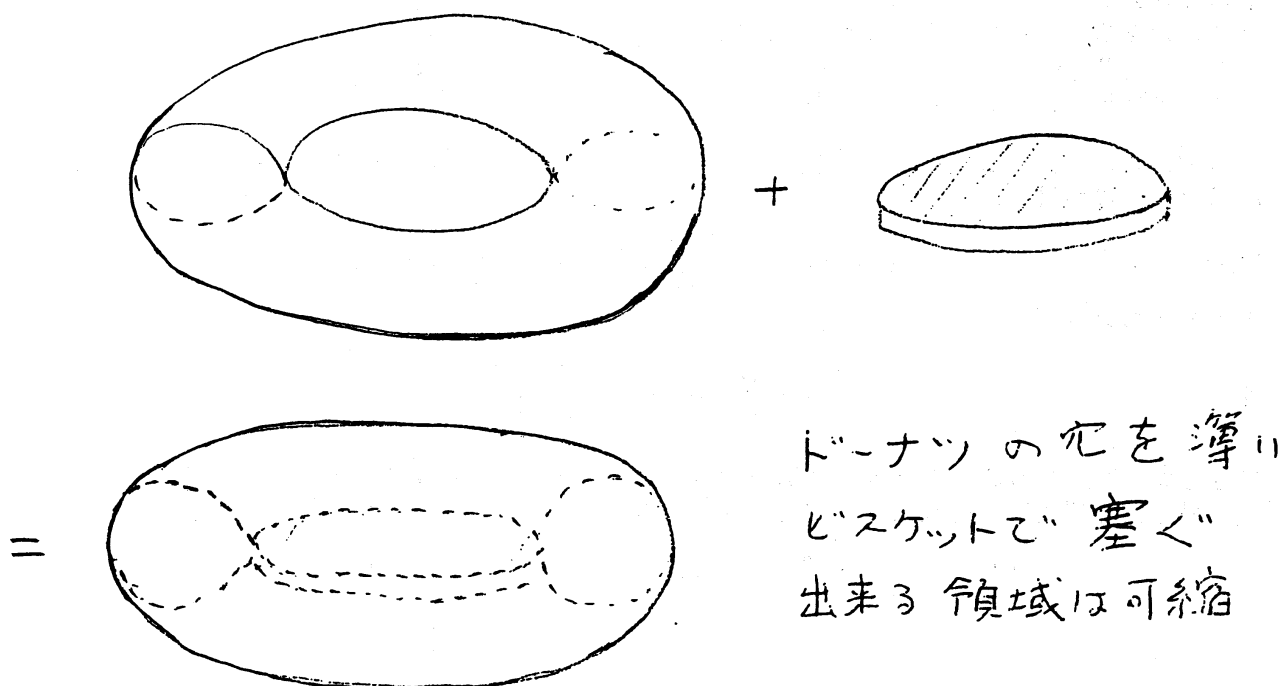
この汎関数に対する perturbed Local minimizer が得られる。

定理 3. $\zeta > 0$ が小さいとき $\tilde{\mathcal{H}}_\lambda$ は Local minimizer $(\tilde{\Phi}_{\lambda, \zeta}, \tilde{A}_{\lambda, \zeta})$ をもち

$$(1.6) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\|\tilde{\Phi}_{\lambda, \zeta} - \Phi_\lambda\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{A}_{\lambda, \zeta} - A_\lambda\|_Z \right) = 0$$

が成立する。

(1.6) における収束は楕円型方程式の解の正則性の評価により良い収束となり、 $\tilde{\Phi}_{\lambda, \zeta}$ は Ω 上では Φ_λ を非常によく近似している。一方、 $Q(\zeta) = \Omega(\zeta) \setminus \Omega$ ではどうなるかは一般にはわからない。ここでの挙動をよく見るためには $Q(\zeta)$ について特定しなければならない。ただし、全体の $\Omega(\zeta)$ が可縮な領域ならばゼロ点をもたなければならないことはわかる。



§2. 自明領域と安定解の非存在 (2 次元版)

単純領域には安定解があまり存在しないと考えられるが、一般の 3 次元の場合はあまり研究が進んでいない。ここでは 2 次元の場合に事柄を考察する。Ω を \mathbb{R}^2 の有界領域で境界は滑らかであるとする。2 次元の GL 汎関数を

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_\lambda(\Phi, A) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right\} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |\operatorname{rot} A|^2 dx$$

ただし、 Φ は \mathbb{C} -valued 関数、 A は \mathbb{R}^2 -valued 関数である。これは 3 次元の問題において x_3 方向にすべて一様な現象を考えていることに対応する。そして $x_1 - x_2$ 方向の切断面でのエネルギー密度を新たな汎関数としている。GL 方程式はこの汎関数の変分方程式として得られる。これは (1.2) 同様の形となる。

定理 4 ([9]). 領域 Ω が凸領域ならば Local minimizer (Φ, A) は自明状態 $(1, 0)$ にゲージ同値である。

注意. 磁場の効果を考慮しない GL モデルについて同様の結果が知られている。Jimbo and Morita [5]. さらに以前には単独の反応拡散方程式について Casten and Holland [1] and Matano [11] さらに competition-system では Kishimoto-Weinberger [10] の仕事がある。今回の我々の結果は方法論的にはある意味で延長線上にある。

(定理 4 の証明の概要) (Φ, A) を任意の Local minimizer として固定して議論をすすめる。また、適当なゲージ変換によって (Φ, A) が (以下の議論に必要な) 滑らかさを持つとして一般性を失わない。さらに $\langle A, \nu \rangle = 0$ ($x \in \partial\Omega$) が成り立つようにしておく。まず次の性質に注意する。

補題. 解 (Φ, A) は $|\Phi(x)| \leq 1$ ($x \in \Omega$) を満たす。

(証) $w(x) = |\Phi(x)|$ が満たす方程式に最大値原理を適用して示される。 □

注意. この性質は Local minimizer のみならず一般の解にたいしても成立する。

補題. $\operatorname{rot} A \equiv 0$ ($x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$)。

これは 2 次元の特殊性より従う。方程式より Ω の外部領域は連結で、ここで $\operatorname{rot} \operatorname{rot} A \equiv 0$ であるから、 $\partial/\partial x_1 (\operatorname{rot} A) = 0$, $\partial/\partial x_2 (\operatorname{rot} A) = 0$ が成立し $\operatorname{rot} A = \text{const}$ となる。一方 $\operatorname{rot} A$ は \mathbb{R}^2 で 2 乗可積分であることから、この定数は外部領域でゼロとなる。これから結論が従う。 □

証明においては第 2 変分 J_λ が重要となるが、これは 3 次元の場合と同じに定義され (1.4) とほぼ同様の公式が得られる。

$$(2.2) \quad J_\lambda(\Phi, A; \Psi, B) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{H}_\lambda(\Phi + \epsilon\Psi, A + \epsilon B)|_{\epsilon=0}$$

アイデアの要は

$$(2.3) \quad I = \sum_{j=1}^2 J_\lambda(\Phi, A; \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial A}{\partial x_j})$$

の量を良く検討することである。(2.3) を第 2 変分公式を用いて計算し、元々の GL 方程式を微分して得られる関数等式を代入して重要な等式を得る。それを説明するため集合を定義する。

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial\Omega \mid \Phi(x) \neq 0\}, \quad \Gamma_2 = \{x \in \partial\Omega \mid \Phi(x) = 0\}.$$

当然ながら $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ が成立する.

補題.

$$(2.4) \quad I = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F(x)H(x)dS$$

ただし, $H = H(x)$ は $x \in \partial\Omega$ における曲率, F は (Φ, A) から決まる $\partial\Omega$ 上の関数で

$$F(x) = \begin{cases} |\nabla w|^2 + w^2|\nabla\phi - A|^2 & (x \in \Gamma_1, \Phi(x) = w(x)\exp(i\phi(x))) \\ |\nabla\Phi|^2 & (x \in \Gamma_2) \end{cases}$$

と定義されている.

ここで Γ_1 での Φ の表し方は一通りではないが F は一意に定まる. 非負であることも注意.

仮定より第2基本形式が非負定値であるから, F は明らかに非負であるから結局 $I \leq 0$ を得る. 従って, (Φ, A) での2方向 $(\partial\Phi/\partial x_1, \partial A/\partial x_1)$, $(\partial\Phi/\partial x_2, \partial A/\partial x_2)$ での2階変分の和がゼロ以下であることになる. 従って, 少なくとも一方が正ならもう一方が負になり, (Φ, A) が Local minimizer でないことになる. 従って, 両方ともゼロであることになる. これより

$$(2.5) \quad J_\lambda(\Phi, A; \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial A}{\partial x_j}) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad J_\lambda(\Phi, A; \Psi, B) \geq 0 \quad ((\Psi, B) \in X)$$

が得られる. また, さらに境界上で曲率が消えない集合上で F がゼロとなる.

従って

$$\Gamma_3 = \{x \in \partial\Omega \mid H(x) > 0\}$$

とおくと

$$(2.6) \quad \nabla\Phi - i\Phi A = 0 \quad \text{on } \Gamma_3,$$

が成立する.

さて (2.5) からわかることは $(\partial\Phi/\partial x_j, \partial A/\partial x_j)$ は $J_\lambda(\Phi, A; \cdot)$ の最小値 0 を与えていることである. よって, その変分方程式と自然に満たすべき境界条件 $(\partial\Phi/\partial x_j, \partial A/\partial x_j)$ に与えられる. 計算によってそれは次の通りである.

$$(2.7) \quad \left(\nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right) - i\Phi \frac{\partial A}{\partial x_j} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (j = 1, 2)$$

これを用いて GL 方程式の第一式を境界で evaluate すれば

$$(2.8) \quad \Phi(x) = 0 \quad \text{or} \quad |\Phi(x)| = 1 \quad \text{on } \partial\Omega$$

が成り立つ. さて境界近傍において議論を進めるため次の集合を定義する.

$$\Gamma_4 = \Gamma_1 \cap \Gamma_3, \quad \Gamma_5 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3.$$

Γ_3 が空集合でないことは明らか. また, $\Gamma_4 \cup \Gamma_5 \neq \emptyset$.

Case (i) $\Gamma_4 \neq \emptyset$.

$p \in \Gamma_4$ を任意に取って (2.8) を考慮すると $|\Phi(p)| = 1$ であるが $\epsilon > 0$ を小さく取り

$$(2.9) \quad \begin{cases} 1/2 \leq |\Phi(x)| \leq 1 & \text{in } B(p; \epsilon) \cap \Omega, \\ |\Phi(x)| = 1 & \text{on } B(p; \epsilon) \cap \partial\Omega, \end{cases}$$

とできる. この局所的な部分領域で $w(x) = |\Phi(x)|$, $\phi(x) = \text{Arg}(\Phi(x))$ が満たす方程式を考える.

$$(2.10) \quad \begin{cases} \Delta w - |\phi - A|^2 w + \lambda(1 - w^2)w = 0 & \text{in } B(p; \epsilon) \cap \Omega \\ \partial w / \nu = 0 & \text{in } B(p; \epsilon) \cap \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, 最大値原理あるいはホップの補題を適用して $w \equiv 1$ ($x \in B(p; \epsilon) \cap \Omega$) を得る. この議論を繰り返して Ω 全体で $w = 1$ となり ϕ も Ω 全体で定義され $A = \nabla \phi$ ($x \in \Omega$) が成立する. さらに $\text{rot} A = 0$ を用いて ϕ を Ω^c で拡張して全空間で $A = \nabla \phi$ とできる. よって (Φ, A) がゲージ変換の意味で自明であることがわかる.

(ii) $\Gamma_4 = \emptyset$.

$p \in \Gamma_5 \neq \emptyset$ を任意にとる. (2.8) を考慮すると適当に $\epsilon > 0$ を小さく取ると

$$(2.11) \quad \Phi(x) = 0, \quad \nabla \Phi = 0 \quad \text{on } B(p; \epsilon) \cap \partial\Omega,$$

とできる. さて方程式を用いて初期値問題を $B(p; \epsilon) \cap \Omega$ で考える

$$(2.12) \quad \begin{cases} (\nabla - iA)^2 \Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi(x) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{on } B(p; \epsilon) \cap \partial\Omega, \end{cases}$$

これにたいしてカルデロンの一意性定理を適用して $\Phi = 0$ ($x \in B(p; \epsilon) \cap \Omega$) を得る. さらに内部で繰り返し一意性定理を適用し $\Phi = 0$ が Ω 全体で成立する. 方程式にもどって第2式に A をかけ積分することで $\int_{\mathbb{R}^2} |\text{rot} A|^2 dx = 0$ を得る. これにより全空間 \mathbb{R}^2 で $A = \nabla \xi$ を得て, $(\Phi, A) = (0, \nabla \eta)$ の形となる. これは $(\Phi_0, A_0) = (0, 0)$ とゲージ同値である. (Φ_0, A_0) での第2変分を計算する.

$$J_\lambda(\Phi_0, A_0, \Psi, 0) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx$$

となるから (Φ_0, A_0) は Local minimizer にはならない, よってこのケースは排除される.

以上をまとめて (Φ, A) が $(1, 0)$ にゲージ同値の場合だけが残って定理の結論を得る. \square

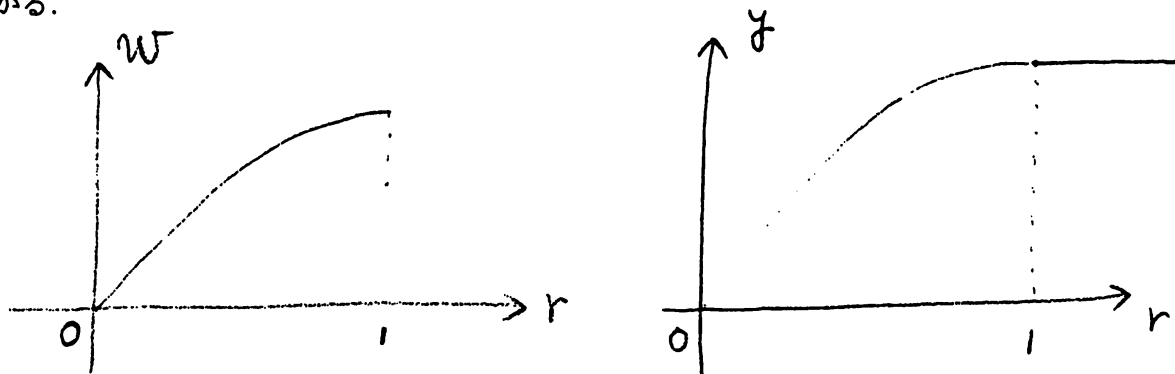
[Example] $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ の場合を考える. 解として $\Phi(x) = w(r)e^{i\theta}$, $A = (y(r)/r)(-\sin \theta, \cos \theta)$ の形のものを考える. ここで極座標 $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ を用いた. 方程式に代入して $w = w(r)$, $y = y(r)$ に関する方程式に還元されるが ODE として

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{(1-y)^2}{r^2} w + \lambda(1-w^2)w = 0 \quad (0 < r < 1),$$

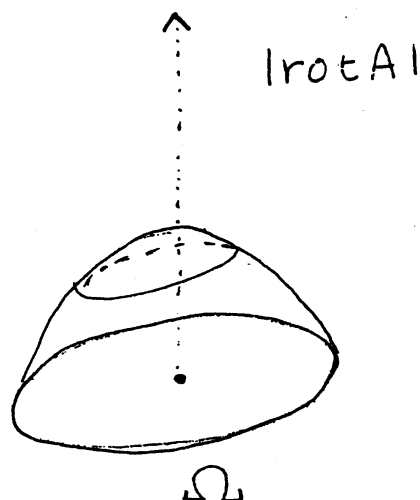
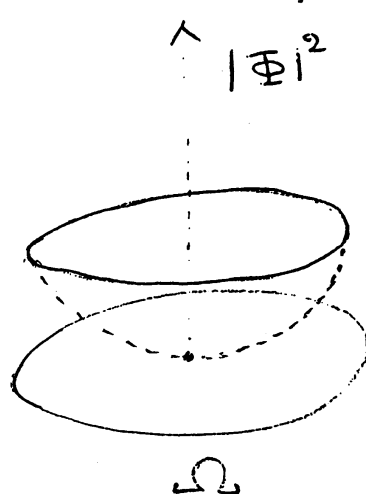
$$\frac{d^2 y}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + (1-y)w^2 \Lambda(r) = 0 \quad (r > 0)$$

$$w(r) > 0 \quad (0 < r < 1), \quad y(r) > 0 \quad (r > 0), \quad w(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad dw/dr(1) = 0,$$

ただし $\Lambda(r) = 1$ ($r \in (0, 1)$), $\Lambda(r) = 0$ ($r \in (1, \infty)$) である. ここで計算によって $|\text{rot} A| = y'(r)/r$ であり, 補題より $y(r) = \text{const}$ ($r \geq 1$) であることもわかる. これらは解析できて単調増加なる解 $w(r), y(r)$ を得て次のグラフを得る. また, 電流の強さ, できる磁場の強さについても様子がわかる.



[電流の強さ, 磁場の強さ]



References

- [1] R. Casten and C. Holland, Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions, *J. Diff. Eqs.* **27** (1978), 266–273.
- [2] Q. Du, M. Gunzberger and J. Peterson, Analysis and approximation of the Ginzburg Landau model of superconductivity, *SIAM Review* **34** (1992), 54–81.
- [3] V. Ginzburg and L. Landau, On the theory of Superconductivity, *Zh. Éksper. Teoret Fiz.* **20** (1950), 1064–1082.
- [4] A. Jaffe and C. Taubes, *Vortices and Monopoles*, Birkhäuser 1980.
- [5] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, *Nonl. Anal. TMA.* **22** (1994), 753–770.
- [6] S. Jimbo and Y. Morita, Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a rotational domain, *SIAM. J. Math. Anal.* **27** (1996), 1360–1385.
- [7] S. Jimbo and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation with magnetic effect: Non-simply-connected domains, *J. Math. Soc. Japan* **50** (1998), 663–684.
- [8] S. Jimbo and J. Zhai, Domain perturbation method and local minimizers to Ginzburg-Landau functional with magnetic effect, to appear in *Abst. Appl. Anal.* (2001).
- [9] S. Jimbo and P. Sternberg, Non-existence of permanent currents in convex planar samples, preprint.
- [10] K. Kishimoto and H. F. Weinberger, The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains, *J. Diff. Eq.* **58** (1985), 15–21.
- [11] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equation, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **15** (1979), 401–454.
- [12] J. Rubinstein and P. Sternberg, Homotopy classification of minimizers of the Ginzburg-Landau energy and the existence of permanent currents, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996),